UNIVERSIDAD
SAN SEBASTIAN

Construcción de los Sistemas Numéricos:

NATURALES, ENTEROS, RACIONALES Y REALES

Para futuros Profesores de Matemática que egresan de la Universidad San Sebastián.

CIES
Centro de Investigación
para la Educación Superior

Autor:
Profesor: Jorge Wevar Negrier

Los Documentos de Trabajo son una publicación del Centro de Investigación en Educación Superior (CIES) de la Universidad San Sebastián que divulgan los trabajos de investigación en docencia y en políticas públicas realizados por académicos y profesionales de la universidad o solicitados a terceros.

El objetivo de la serie es contribuir al debate de temáticas relevantes de las políticas públicas de educación superior y de nuevos enfoques en el análisis de estrategias, innovaciones y resultados en la docencia universitaria. La difusión de estos documentos contribuye a la divulgación de las investigaciones y al intercambio de ideas de carácter preliminar para discusión y debate académico.

UNIVERSIDAD
SAN SEBASTIAN
EDICIONES

En caso de citar esta obra:

Webar, J. (2017). Construcción de los Sistemas Numéricos:Naturales, Enteros, Racionales y Reales. Serie Creación n° 17. Facultad de Ciencias de la Educación. Centro de Investigación en Educación Superior CIES - USS; Santiago.

Serie Creación nº 17

Construcción de los Sistemas Numéricos:
Naturales, Enteros, Racionales y Reales

Construcción de los naturales

Definición.

Sea X conjunto, se define y denota el sucesor de X al conjunto $X^+ = X \cup \{X\}$.

Definición.

Se denota y define como el cero "0" al conjunto vacío $\emptyset$, es decir, $0 = \emptyset$.

Axioma del infinito

Existe un conjunto que contiene el 0 y el sucesor de todos y cada uno de sus elementos.

$$\exists W,\ 0 \in W \wedge (x \in W \Rightarrow x^+ \in W)$$

Notas.

El conjunto W se llama conjunto sucesor.
Así, el axioma del infinito nos dice que, existe un conjunto sucesor.
Este es el tipo de axioma necesario para introducir los naturales.

Teorema 1.

Sea $\left(X_j\right)_{j \in J}$ una familia de conjuntos sucesores de A.
Entonces $\bigcap_{j \in J} X_j$ es un conjunto sucesor.

Demostración.

Sea $W = \bigcap_{j \in J} X_j$, donde $\left(X_j\right)_{j \in J}$ es una familia de conjuntos sucesores de A.
Entonces debemos probar que W es conjunto sucesor, es decir, que verifica:

i) $0 \in W$
ii) Si $x \in W$, entonces $x^+ \in W$.

En efecto:

i) Como X_j es conjunto sucesor $\forall j \in J$, entonces $0 \in X_j, \forall j \in J$, luego $0 \in \bigcap_{j \in J} X_j$, es decir, $0 \in W$.
ii) Por otro lado, si $x \in W \Leftrightarrow x \in \bigcap_{j \in J} X_j \Leftrightarrow x \in X_j\ , \forall j \in J \Longrightarrow x^+ \in X_j\ , \forall j \in J$, (ya que X_j es conjunto sucesor $\forall j \in J$) $\Leftrightarrow x^+ \in \bigcap_{j \in J} X_j \Leftrightarrow x^+ \in W$.

Definición.

Sea $\complement$ una colección de todos los subconjuntos de A que son conjuntos sucesores, es decir, $\complement = \{ X \in \mathcal{P}(A) :\ X\ \ es\ un\ conjunto\ sucesor\ \}$, se define el conjunto de "números naturales" como $\omega = \bigcap_{X \in \complement} X$

Observación.

Por el teorema anterior, el conjunto $\omega = \bigcap_{X \in C} X$ es un conjunto sucesor.

Teorema 2.

Si W es conjunto sucesor, entonces $\omega \subset W$. Es decir ω es minimal.

Demostración.

Sea W un conjunto sucesor arbitrario, entonces $W \cap A$ es también conjunto sucesor y como $W \cap A \subset A$, entonces $W \cap A$ es otro de los conjuntos sucesores de la colección C que contiene al conjunto de números naturales $\omega = \bigcap_{X \in C} X$, luego $\omega \subset W \cap A$ y por lo tanto, $\omega \subset W$.

Lo anterior prueba la propiedad minimal que caracteriza a los naturales.

Teorema 3.

El conjunto $\omega = \bigcap_{X \in C} X$ es único (no depende de A)

Demostración.

Supongamos que existe otro, $\overline{\omega}$.

Como ω es minimal, $\omega \subset \overline{\omega}$ y el otro $\overline{\omega}$ también es minimal, por lo tanto $\overline{\omega} \subset \omega$, por el axioma de extensión, $\overline{\omega} = \omega$. Luego ω es único.

Observación.

Como $0 = \emptyset$

$$1 = 0^+ = 0 \cup \{0\} = \{0\}$$

$$2 = 1^+ = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$$

$$3 = 2^+ = 2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$$

$$4 = 3^+ = 3 \cup \{3\} = \{0, 1, 2\} \cup \{3\} = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\vdots$$

Se ha demostrado que el conjunto de los números naturales ω es el único conjunto de sucesores que es subconjunto de cualquier conjunto de sucesores.

Por el axioma del infinito, concluimos de inmediato parte del siguiente teorema.

Teorema 4.

a. $0 \in \omega$
b. $n \in \omega \Rightarrow n^+ \in \omega$
c. $\sim(\exists\, n \in \omega,\ n^+ = 0)$
d. $\big(S \subset \omega,\ 0 \in S,\ (n \in S \Rightarrow n^+ \in S)\big) \Longrightarrow\ S = \omega$

e. $x \in n \Rightarrow x \subset n, \ \forall n \in \omega$
f. $\forall\, n, m \in \omega \implies (n^+ = m^+ \Rightarrow n = m)$

Demostración.

a. Inmediato por axioma del infinito.
b. Inmediato también por el axioma del infinito.
c. Supongamos lo contrario, es decir, que se verifica la negación de la proposición. Así, $\exists\, n \in \omega, \ \ n^+ = 0$, es decir, $\mathrm{n} \cup \{n\} = \emptyset$, lo cual es contradictorio.
d. De la segunda y tercera parte del antecedente o hipótesis, es decir, de $0 \in S$ y de $(n \in S \Rightarrow n^+ \in S)$, por el axioma del infinito, se concluye que S es conjunto sucesor y por la propiedad minimal, $\omega \subset S$. Como $S \subset \omega$, por la primera parte de la hipótesis, usando el axioma de extensión concluimos que $S = \omega$.
e. Sea $S = \{n \in \omega : \ x \in n \Rightarrow x \subset n\}$, verifiquemos primero las tres hipótesis del teorema 4.d.:
   o) $S \subset \omega$.
   i) $0 \in S$. En efecto, $x \in 0 \Rightarrow x \subset 0$ es lógicamente verdadera.
   ii) Si $n \in S$, entonces $x \in n \Rightarrow x \subset n$. (h)
   "debemos probar que $x \in n^+ \Rightarrow x \subset n^+$ "
   Si $x \in n^+ \Leftrightarrow x \in n \cup \{n\}$, entonces $x \in n \ \vee \ x \in \{n\}$
   Si $x \in n \Rightarrow_{(h)} x \subset n$ y por lo tanto $x \subset n \subset n \cup \{n\} = n^+$
   Y si $x \in \{n\} \Rightarrow x = n$ y por lo tanto $x = n \subset n \cup \{n\} = n^+$
   Por lo tanto hemos probado que $n^+ \in S$.
   De o), i) y ii), aplicando ahora el teorema 4.d., se concluye que $S = \omega$.
   Lo anterior equivale a decir que, $x \in n \Rightarrow x \subset n$ es válida o verdadera $\forall n \in \omega$.

f. $\forall\, n, m \in \omega$, supongamos que $n^+ = m^+$, entonces,
   i) Si $n \in n^+ = n \cup \{n\} \implies n \in m^+ = m \cup \{m\}$. Luego $n \in m \vee n = m$. Aplicando el teorema 4.e., tenemos que $n \subset m \vee n = m$.
   ii) Análogamente, si $m \in m^+ = m \cup \{m\}$, se tiene que $m \subset n \vee m = n$.
   De i, y ii., por el axioma de extensión, se concluye que $n = m$.

Observaciones.

El teorema 4, parte a., b., c., f. y d., constituye el conocido "Sistema de Axiomático de Peano", y que aquí hemos demostrado.

El teorema 4.d., se denomina Principio de Inducción Matemática o 5º Axioma de Peano.

La demostración del teorema 4.e., fue realizada usando el teorema 4.d., conocida popularmente como "demostración por inducción" (sobre n).

Esta demostración consiste en:

o) Definir un subconjunto S de número naturales que verifica la propiedad que se desea probar, por lo tanto se verifica de la partida que $S \subset \omega$.

i) Posteriormente se debe probar que $0 \in S$, lo que equivale a verificar que la propiedad se verifica para $n = 0$.

ii) Finalmente suponer que si $n \in S$, entonces $n^+ \in S$. Al suponer que $n \in S$, equivale a suponer la veracidad de la proposición para n, esta suposición se denomina "hipótesis de inducción" y con ello se debe probar que el sucesor de n, también la verifica, es decir, que $n^+ \in S$.

De los tres pasos anteriores aplicando el teorema 4.d., es decir, el principio de inducción matemática, se concluye que el conjunto S es el conjunto de números naturales, es decir, que $S = \omega$. Lo anterior equivale a probar la veracidad de la proposición para todos los números naturales.

Observaciones.

Ningún $n \in \omega$, es subconjunto de uno de sus elementos.

Todo elemento de un $n \in \omega$, es subconjunto de n, (teorema 4.e.)

Hemos definido el conjunto ω, como el conjunto de los números naturales o simplemente "naturales". Así, $0 \in \omega$, $1 \in \omega$, $2 \in \omega$, … $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Usted sabe o conoce que el conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, es el conjunto de los números naturales. Aceptemos que $\omega = \mathbb{N} \cup \{0\}$, es también el conjunto de los números naturales y que $\mathbb{N} = \omega \setminus \{0\}$, es el conjunto de los números naturales. Es decir, tenemos dos objetos distintos con un mismo nombre. Por lo tanto el conjunto de los números naturales es $\omega \veebar \mathbb{N}$. Así, lo que usted no debe aceptar, es que alguien afirme, que "es falso que 0, sea un número natural", y tampoco la afirmación, "es falso que 0, no sea un número natural".

Teorema 5.

a. $n \neq n^+$, $\forall\, n \in \omega$

b. $n \notin n$, $\forall\, n \in \omega$

c. $(\forall m \in \omega \setminus \{0\} = \mathbb{N}) \Longrightarrow (\exists\, n \in \omega : m = n^+)$

d. $n \in \omega \Longrightarrow n \subset \omega$

e. $x \in n \Longrightarrow x \in \omega$, $\forall\, n \in \omega$

f. Si $f = \{(n, n^+) \in \omega^2 : n \in \omega\}$, entonces $f : \omega \longrightarrow \omega \setminus \{0\}$ es biyectiva.

Demostración.

a. Usemos el principio de inducción matemática:

Sea $S = \{n \in \omega : n \neq n^+\}$

o) Claramente $S \subset \omega$

i) $0 \in S$, en efecto $0 \neq 0^+$, ya que $0^+ = 0 \cup \{0\} = \{0\}$ y $\{0\} \neq 0$.

ii) Si $n \in S$, entonces $n \neq n^+$, aplicando a esta desigualdad el contra recíproco del teorema 4.f., se obtiene que $n^+ \neq (n^+)^+$, por lo tanto $n^+ \in S$

De o), i) y ii) por el teorema 4.d. (principio de inducción matemática) $S = \omega$.

Por lo tanto, $n \neq n^+$, $\forall\, n \in \omega$.

b. Si no: $\exists n \in \omega$, $n \in n$, entonces $\{n\} \subset n$, luego $n \cup \{n\} = n$.

Lo anterior implica que $n^+ = n \cup \{n\} = n$, es decir, $n = n^+$ lo que es contradictorio por el teorema anterior. Luego $n \notin n,\ \forall\, n \in \omega$.

Indicaciones para las demostraciones de c., d. y e.

c. Utilice el principio de inducción matemática sobre "m", considerando:
$$S = \{m \in \omega : \ n = 0 \vee (\exists n \in \omega, m = n^+)\ \}$$
d. Utilice el principio de inducción matemática sobre "n", considerando:
$$S = \{n \in \omega : \ n \subset \omega\ \}$$
e. Use el teorema 5.d..
f. Esta demostración se deja como un desafío opcional.

Observaciones

La axiomática de Peano (expresada por el matemático italiano Giuseppe Peano 1852-1932) en la bibliografía tradicional es común encontrarla expuesta como:

<u>Axiomas de Peano</u>

(1) $0 \in \omega$
(2) $n \in \omega \ \Rightarrow \ \exists! \ \ n^+ \in \omega$
(3) $\forall n \in \omega, \ n^+ \neq \emptyset$, o bien $\sim(\exists\, n \in \omega, \ \ n^+ = 0)$
(4) $n, m \in \omega \Rightarrow \ (n^+ = m^+ \Rightarrow n = m)$
(5) Si $S \subset \omega$ y se verifican:
  i) $0 \in S$
  ii) $n \in S \Rightarrow n^+ \in S$
  Entonces $S = \omega$

<u>Axioma 5º de Peano</u>

"Un conjunto de números naturales al que pertenezcan el 0 y el número siguiente de cada uno de sus elementos, es la totalidad de ellos"

El axioma (5) es conocido como el "Axioma de Recurrencia" o "Axioma de Inducción Matemática".

<u>Consecuencias del 5º axioma de Peano</u>

I. <u>Como método de definición:</u>

Al definir el ente $E(n)$, se utiliza un razonamiento constructivo, que consiste en definir:

i) $E(0)$ (o bien $E(1)$ es verdadera)

ii) $E(n^+)$ a partir de $E(n)$, $\forall\, n \in \omega$. (o $\forall n \in \mathbb{N}$)

A este tipo de definición se le denomina "recursiva" o por "recurrencia"

Ejemplos:

1) Potencia $n - \acute{e}sima\ de\ x$. $(x^n ,\ \ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$
   i) $x^0 = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
   ii) $x^{n^+} = x^n \cdot x,\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \forall n \in \omega$
   Para $n \in \omega,\ -n \in \mathbb{Z}\backslash\omega$, se define: $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \forall n \in \omega$.

2) Factorial de n. $(n!)$
   i) $0! = 1$
   ii) $(n^+)! = (n^+) \cdot n!\,,\ \forall n \in \omega$

3) Sumatoria de los x_k , para $k = 1, \dots, n$. $(\sum_{k=1}^{n} x_k\ ,\ \ x_k \in \mathbb{R})$
   i) $\sum_{k=1}^{1} x_k = x_1$
   ii) $\sum_{k=1}^{n+1} x_k = (\sum_{k=1}^{n} x_k) + x_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$

4) Productoria de los x_k , para $k = 1, \dots, n$. $(\prod_{k=1}^{n} x_k\ ,\ \ x_k \in \mathbb{R})$
   i) $\prod_{k=1}^{1} x_k = x_1$
   ii) $\prod_{k=1}^{n+1} x_k = (\prod_{k=1}^{n} x_k) \cdot x_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$

II. Como método de demostración:

Principio de Inducción Matemática

Sea $P(n)$ una proposición que depende de n y si:
i) $P(0)$ es verdadera. (o $P(1)$ es verdadera)
ii) Si $P(n)$ es verdadera, entonces $P(n^+)$ es verdadera.
Entonces $P(n)$ es verdadera $\forall n \in \omega$. (o $\forall n \in \mathbb{N}$)

Ejemplos
Se pueden demostrar por Inducción matemática, entre otras propiedades, que:

1) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n)^+ = (n^+)^2,\ \ \forall\, n \in \omega$

2) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n\ ,\ \ \forall\, n \in \omega$

3) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot n^+}{2}, \quad \forall\, n \in \omega$

Aritmética y orden en los naturales

Aritmética en ω (definiciones recursivas)
Adición:

Se define la "suma de m con n", $\forall m, n \in \omega$: $m + n = s_m(n)$ donde

$s_m\colon \omega \longrightarrow \omega$ es la función u operación adición con m , tal que

i. $s_m(0) = m$
ii. $s_m(n^+) = (s_m(n))^+$

Teorema 6.

a. $\forall n \in \omega,\ n^+ = n + 1$
b. $n + 0 = n,\ \forall n \in \omega$
c. $0 + n = n,\ \forall n \in \omega$
d. $s_{n^+}(m) = (s_n(m))^+,\ \forall m, n \in \omega$
e. $n + m = m + n,\ \forall m, n \in \omega$
f. $n + (m + k) = (n + m) + k,\ \forall m, n, k \in \omega$
g. $(n + k = m + k) \Rightarrow (n = m),\ \forall m, n, k \in \omega$

Demostración

a. $n + 1 = s_n(1) = s_n(0^+) = (s_n(0))^+ = (n)^+, \forall n \in \omega;$ por lo tanto $n^+ = n + 1$.
b. $n + 0 = s_n(0) = n\ , \forall n \in \omega$.
c. Usemos el principio de inducción matemática, sea $S = \{n \in \omega :\ 0 + n = n\}$
   o) $S \subset \omega$.
   i) $0 \in S$, en efecto, $0 + 0 = s_0(0) = 0$.
   ii) Si $n \in S,\ 0 + n = n$ (hipótesis de inducción).
   Entonces $0 + n^+ = s_0(n^+) = (s_0(n))^+ = (0 + n)^+ =_{(hi)} (n)^+ = n^+$, por lo tanto $n^+ \in S$.
   De o), i) y ii) y por el teorema 4.d. (principio de inducción matemática) $S = \omega$.

Las demostraciones de los teoremas d., e., f. y g. se dejan como ejercicios.

Multiplicación:

Se define el "producto de m con n", $\forall m, n \in \omega$: $m \cdot n = p_m(n)$ donde

$p_m\colon \omega \longrightarrow \omega$ es la función u operación multiplicación con m , tal que

i. $p_m(0) = 0$
ii. $p_m(n^+) = s_m(p_m(n))$

Teorema 7.

a. $\forall m \in \omega,\ \ m \cdot 0 = 0$
b. $\forall m \in \omega,\ \ m \cdot 1 = m$
c. $\forall m, n \in \omega,\ m \cdot n^+ = m + m \cdot n$

d. $\forall n \in \omega, \quad 0 \cdot n = 0$
e. $n \cdot m + m = n^{+} \cdot m, \quad \forall m, n \in \omega$
f. $n \cdot m = m \cdot n, \ \forall m, n \in \omega$
g. $n \cdot (m + k) = n \cdot m + n \cdot k, \ \forall m, n, k \in \omega$
h. $n \cdot (m \cdot k) = (n \cdot m) \cdot k, \ \forall m, n, k \in \omega$

Demostración

a. $m \cdot 0 = p_m(0) = 0, \quad \forall m \in \omega.$
b. $m \cdot 1 = p_m(1) = p_m(0^{+}) = s_m\big(p_m(0)\big) = m + m \cdot 0 = m + 0 = m, \quad \forall m \in \omega.$
c. $m \cdot n^{+} = p_m(n^{+}) = s_m\big(p_m(n)\big) = m + m \cdot n, \quad \forall m, n \in \omega.$
d. Usemos el principio de inducción matemática, sea $S = \{n \in \omega : \ 0 \cdot n = 0\}$
   o) $S \subset \omega.$
   i) $0 \in S$, en efecto, $0 \cdot 0 = p_0(0) = 0.$
   ii) Si $n \in S, \ 0 \cdot n = 0$ (hipótesis de inducción).
   Entonces $0 \cdot n^{+} = 0 + 0 \cdot n =_{(hi)} 0 + 0 = 0$, por lo tanto $n^{+} \in S.$
   De o), i) y ii) y por el teorema 4.d. (principio de inducción matemática) $S = \omega.$

Las demostraciones de los teoremas e., f., g. y h. se dejan como ejercicios.

Potenciación

Se define la ”potencia n, de m“, o bien, la ”potencia de base m, y exponente n“, $\forall m, n \in \omega : \quad m^n = e_m(n)$ donde

$e_m : \omega \longrightarrow \omega$ es la función u operación potenciación de m, tal que

i. $e_m(0) = 1$
ii. $e_m(n^{+}) = p_m(e_m(n))$

Teorema 8.

a. $\forall m \in \omega, \ m^0 = 1$
b. $\forall m \in \omega, \ m^1 = m$
c. $m^{n^{+}} = m \cdot m^n, \ \forall m, n \in \omega$
d. $m^{n+k} = m^n \cdot m^k, \ \forall m, n, k \in \omega$
e. $(m^n)^k = m^{n \cdot k}, \ \forall m, n, k \in \omega$

Demostración

a. $m^0 = e_m(0) = 1, \quad \forall m \in \omega.$
b. $m^1 = e_m(1) = e_m(0^{+}) = p_m\big(e_m(0)\big) = m \cdot m^0 = m \cdot 1 = m, \quad \forall m \in \omega.$

Las demostraciones de los teoremas c., d. y e. se dejan como ejercicios.

Orden en ω

Teorema 9.

Si $m, n \in \omega$, entonces

a. $\sim(n \in m \ \wedge \ n = m)$
b. $\sim(m \in n \ \wedge \ n = m)$
c. $\sim(n \in m \ \wedge \ m \in n)$

Demostración.

a. Si no: $n \in m \ \wedge \ n = m$, entonces $m \in m$, contradictorio con el teorema 5.b.
b. Análoga a la demostración anterior.
c. Si no: $n \in m \ \wedge \ m \in n$, entonces por teorema 4.e., $n \subset m \ \wedge \ m \subset n$, luego por axioma de la extensión $m = n$ y por lo tanto $n \in n$, lo que contradice el teorema 5.b.

Observación.

Del teorema anterior concluimos que:

Si $m, n \in \omega$, entonces $(n \in m) \veebar (n = m) \veebar (m \in n)$

Definición.

Para $m, n \in \omega$, se define la relación de orden "menor o igual que" ($\leq$), como

$$(n \leq m) \Leftrightarrow [(n \in m) \vee (n = m)]$$

Nota.

$(n < m) \Leftrightarrow [(n \leq m) \wedge (n \neq m)] \Leftrightarrow (n \in m)$

Teorema 10.

El par $(\omega \, , \ \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado (CPO), es decir, la relación "menor o igual que" en ω , verifica que es:

a. $n \leq n, \ \forall n \in \omega$ (reflexividad)
b. $(n \leq m \ \wedge \ m \leq n) \Rightarrow (n = m)$ (antisimetría)
c. $(n \leq m \ \wedge \ m \leq p) \Rightarrow (n \leq p)$ (transitividad)

Demostración

a. $n \leq n, \ \forall n \in \omega$ es verdadera, ya que la disyunción $n \in n \vee n = n$ es verdadera, aunque $n \in n$ es falso por el teorema 5.b. Por lo tanto, es refleja.
b. Si $n \leq m \ \wedge \ m \leq n$, entonces $(n \in m \bigvee n = m) \ \bigwedge \ (m \in n \bigvee m = n)$
   Si $n \in m$ y $m \in n$, entonces se contradice con el teorema 9.c.
   Si $n \in m$ y $m = n$, entonces se contradice con el teorema 9.a.
   Si $n = m$ y $m \in n$ entonces se contradice con el teorema 9.b.
   Luego $n = m$. Por lo tanto, es antisimétrica.
c. Si $n \leq m \ \wedge \ m \leq p$, entonces $(n \in m \bigvee n = m) \ \bigwedge \ (m \in p \bigvee m = p)$
   Si $n \in m$ y $m \in p$, entonces por teorema 4.e., $m \subset p$ y por lo tanto $n \in p$
   Si $n \in m$ y $m = p$, entonces $n \in p$
   Si $n = m$ y $m \in p$, entonces $n \in p$
   Si $n = m$ y $m = p$, entonces $n = p$
   Luego los cuatro casos, $n \in p \vee n = p$, entonces $n \leq p$. Por lo tanto, es transitiva.

Observación.

La relación de orden "menor o igual que" ($\leq$), no verifica la propiedad simétrica, es decir, $\sim(n \leq m \Rightarrow m \leq n\,)$.

Teorema 11.

$$n < m \Longrightarrow \; n^{+} < m^{+}, \; \forall n, m \in \omega.$$

Demostración.

Equivalentemente demostraremos $x \in n \Longrightarrow x^{+} \in n^{+}, \;\; \forall x, n \in \omega$.

Usemos el principio de inducción matemática.

Sea $S = \{n \in \omega : \; x \in n \Longrightarrow x^{+} \in n^{+}\}$

o) $S \subset \omega$.

i) $0 \in S$, en efecto, $x \in 0 \Longrightarrow x^{+} \in 0^{+}$ es lógicamente verdadera, ya que el antecedente es falso.

ii) Si $n \in S, \; x \in n \Longrightarrow x^{+} \in n^{+}$ (hipótesis de inducción).

Si $x \in n^{+} = n \cup \{n\}$, entonces $x \in n \vee x = n$.

Si $x \in n \Longrightarrow_{hi} x^{+} \in n^{+}$, pero $(n^{+})^{+} = n^{+} \cup \{n^{+}\}$, luego $n^{+} \subset (n^{+})^{+}$, por lo tanto, $x^{+} \in (n^{+})^{+}$.

Si $x = n \Longrightarrow x^{+} = n^{+}$, pero $n^{+} \in (n^{+})^{+}$, por lo tanto, $x^{+} \in (n^{+})^{+}$.

Luego en ambos casos $x^{+} \in (n^{+})^{+}$, si $x \in n^{+}$. Por lo tanto, $n^{+} \in S$.

De o), i) y ii) y por el teorema 4.d. (principio de inducción matemática) $S = \omega$.

Teorema 12.

El par $(\omega\,, \; \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado (CTO), es decir, el par $(\omega\,, \; \leq)$ es CPO, y la relación "menor o igual que" en ω, verifica que:

Si $\forall m, n \in \omega, \;\; m \neq n, \;\;$ entonces $\;(n \leq m) \vee (m \leq n)$.

Demostración.

Indicación para la demostración por el principio de inducción matemática, considere $S_n = \{m \in \omega : \;\; m < n \;\; \vee \;\; n \leq m\,\}$ y realice inducción sobre m.

Se dice también que " $\leq$ " es una ordenación total (un orden estricto, un orden lineal o convexo). También se dice que el par $(\omega\,, \; \leq)$ es una cadena.

Teorema 13.

$$n < m \;\Rightarrow \begin{Bmatrix} n + k < m + k & \\ n \cdot k < m \cdot k\,, & si \;\; k \neq 0 \end{Bmatrix}, \;\; \forall m, n, k \in \omega.$$

Demostración

Con $n < m$, realice inducción sobre k y defina

$S = \{k \in \omega : \;\; n + k < m + k\,\}$, para la primera parte y

$S = \{k \in \omega : \; k = 0 \; \vee \; n \cdot k < m \cdot k\,\}$, para la segunda parte.

Teorema 14.

$T \subset \omega, \; T \neq \emptyset \;\; \Rightarrow \;\; \exists\, p \in T$ tal que $p \leq m, \; \forall m \in T$ "p es primer elemento de T".

Observación.

Se dice que el par $(\omega\ ,\ \leq\ )$ es un conjunto bien ordenado (CBO), ya que todo subconjunto T no vacío de ω, posee primer elemento con respecto a " $\leq$ ".

Construcción de los enteros.

$\Leftrightarrow m - n = a - b$

Definición.

En el conjunto $\omega^2 = \omega\times\omega$, se define la relación " $\sim$ ", como:

$$(m,n)\sim(a,b) \Leftrightarrow m + b = n + a$$

Teorema 15.

La relación " $\sim$ " en ω^2 es relación de equivalencia.

Demostración.

Para demostrar que es relación de equivalencia, debemos probar que, $\forall m,n,a,b,p,q \in \omega$, se verifican:

a. $(m,n)\sim(m,n)$, es decir, que es refleja.
b. $(m,n)\sim(a,b) \implies (a,b)\sim(m,n)$, es decir, que es simétrica.
c. $(m,n)\sim(a,b)\wedge(a,b)\sim(p,q) \implies (m,n)\sim(p,q)$, es decir, que es transitiva.

En efecto:

Demostración de a.

$(m,n)\sim(m,n) \Leftrightarrow m + n = n + m$ es verdadero por la conmutatividad de la adición en ω, por teorema 6.d.

Las demostraciones de b. y c. se dejan como ejercicios.

Observación.

Determinemos las clases de equivalencia de los elementos de $\omega^2 = \omega\times\omega$ y el conjunto cuociente ${}^{\omega\times\omega}/_{\sim}$.

Nota.

Clase de equivalencia se denota y define como

$$[(m,n)] = \{(x,y) \in \omega^2 : \ (x,y)\sim(m,n)\}$$

Ejemplos.

1) La clase de equivalencia

$$\begin{aligned}[(5,2)] &= \{(x,y) \in \omega^2 : \ (x,y)\sim(5,2)\} \\ &= \{(x,y) \in \omega^2 : \ x + 2 = y + 5\} \\ &= \{(6,3),(5,2),(4,1),(3,0),(7,4),(8,5),(9,6),\dots\}\end{aligned}$$

2) La clase de equivalencia

$$\begin{aligned}[(5,9)] &= \{(x,y) \in \omega^2 : \ (x,y)\sim(5,9)\} \\ &= \{(x,y) \in \omega^2 : \ x + 9 = y + 5\} \\ &= \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \dots\}\end{aligned}$$

¡Identifique algunos de sus elementos!

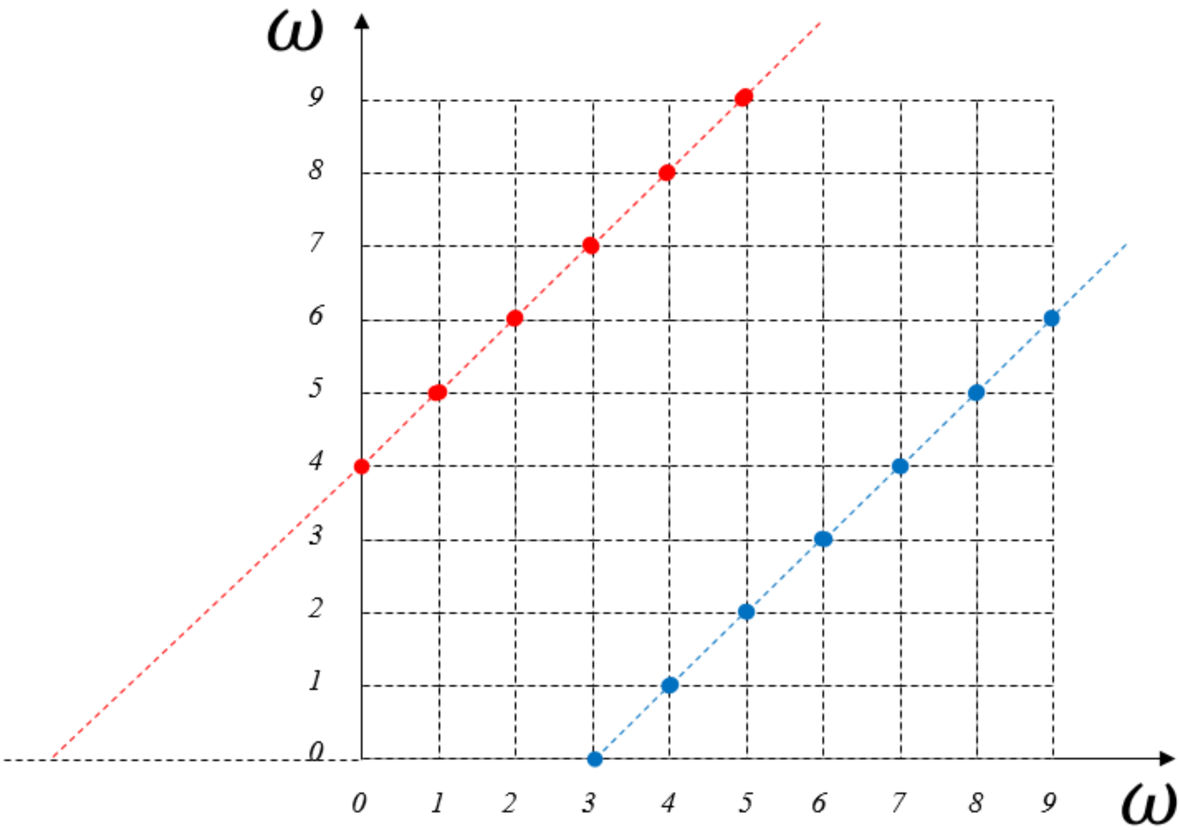
Ejercicio.

Determine otras clases de equivalencia, ¡a lo menos tres!

En el siguiente diagrama $\omega^2 = \omega\times\omega$ están representadas las clases de equivalencia determinadas en los ejemplos anteriores, esto es, las clases: $[(5,2)]$ y $[(5,9)]$.

1) Represente en el mismo diagrama, otras clases que usted determinó.

2) Encuentre el mejor representante para cada una de las clases.



Notación:

- $[(m,n)] = m + (-n) = m - n\,; \quad m \in \omega,\ n \in \omega.$
- $[(m,0)] = m\,; \quad m \in \omega.$
- $[(0,n)] = -n\,; \quad n \in \omega$ "entero negativo (opuesto de n)"

Definición.

$$\mathbb{Z} = {}^{\omega\times\omega}/_{\sim}$$

Aritmética y orden en los enteros.

Adición:

Se define operación adición como la función

$$\begin{array}{cccccc} \oplus_{\mathbb{Z}} & : & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & & ([(a,b)],[(c,d)]) & \longmapsto & [(a,b)] \oplus_{\mathbb{Z}} [(c,d)] \end{array}$$

donde $[(a,b)] \oplus_{\mathbb{Z}} [(c,d)] = [(a+c, b+d)]$, llamada suma de $[(a,b)]$ con $[(c,d)]$

Determine:

- $[(5,2)] \oplus_{\mathbb{Z}} [(5,9)] =$
- $[(5,0)] \oplus_{\mathbb{Z}} [(0,9)] =$

Teorema 16.

$(\mathbb{Z}, \oplus_{\mathbb{Z}})$ es un grupo abeliano.

Demostración.

Para demostrar que es grupo abeliano, debemos probar que, $\forall a,b,c,d,e,f \in \omega$, se verifican:

a. $[(a,b)] \oplus_{\mathbb{Z}} [(c,d)] = [(c,d)] \oplus_{\mathbb{Z}} [(a,b)]$, es decir, que es conmutativa.
b. $([(a,b)] \oplus_{\mathbb{Z}} [(c,d)]) \oplus_{\mathbb{Z}} [(e,f)] = [(a,b)] \oplus_{\mathbb{Z}} ([(c,d)] \oplus_{\mathbb{Z}} [(e,f)])$, es decir, que es asociativa.
c. $\exists\, [(x,y)] \in \mathbb{Z}$, tal que $[(a,b)] \oplus_{\mathbb{Z}} [(x,y)] = [(a,b)]$, es decir, que existe una “clase cero”.
d. $\forall\, [(a,b)] \in \mathbb{Z}$, $\exists\, [(x,y)] \in \mathbb{Z}$, tal que $[(a,b)] \oplus_{\mathbb{Z}} [(x,y)]$ es la “clase cero”, es decir, que existe una “clase opuesta” para cada clase.

En efecto:

Demostración de a.
$[(a,b)] \oplus_{\mathbb{Z}} [(c,d)] = [(a+c, b+d)]$,
$[(c,d)] \oplus_{\mathbb{Z}} [(a,b)] = [(c+a, d+b)]$,
pero por teorema 6.d. (conmutatividad de la adición en ω),
$[(a+c, b+d)] = [(c+a, d+b)]$
Luego $[(a,b)] \oplus_{\mathbb{Z}} [(c,d)] = [(c,d)] \oplus_{\mathbb{Z}} [(a,b)]$.
Las demostraciones de b., c. y d. se dejan como ejercicios.

Multiplicación:

Se define operación multiplicación como la función

$$\begin{array}{cccccc} \otimes_{\mathbb{Z}} & : & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & & ([(a,b)],[(c,d)]) & \longmapsto & [(a,b)] \otimes_{\mathbb{Z}} [(c,d)] \end{array}$$

donde $[(a,b)] \otimes_{\mathbb{Z}} [(c,d)] = [(ac+bd, ad+bc)]$, llamado producto de $[(a,b)]$ con $[(c,d)]$

Determine:

- $[(5,2)] \otimes_{\mathbb{Z}} [(5,9)] =$
- $[(0,2)] \otimes_{\mathbb{Z}} [(5,0)] =$

Teorema 17.

$(\mathbb{Z}\,,\ \otimes_{\mathbb{Z}})$ es un monoide conmutativo o semigrupo abeliano con elemento neutro.

Demostración.

Para demostrar que es semigrupo abeliano, debemos probar que, $\forall a, b, c, d, e, f \in \omega$, se verifican:

a. $[(a,b)] \otimes_{\mathbb{Z}} [(c,d)] = [(c,d)] \otimes_{\mathbb{Z}} [(a,b)]$, es decir, que es conmutativa.

b. $([(a,b)] \otimes_{\mathbb{Z}} [(c,d)]) \otimes_{\mathbb{Z}} [(e,f)] = [(a,b)] \otimes_{\mathbb{Z}} ([(c,d)] \otimes_{\mathbb{Z}} [(e,f)])$, es decir, que es asociativa.

c. $\exists\ [(x,y)] \in \mathbb{Z}$, tal que $[(a,b)] \otimes_{\mathbb{Z}} [(x,y)] = [(a,b)]$, es decir, que existe una "clase unidad".

En efecto:

Demostración de a.

$[(a,b)] \otimes_{\mathbb{Z}} [(c,d)] = [(ac+bd, ad+bc)]$,

$[(c,d)] \otimes_{\mathbb{Z}} [(a,b)] = [(ca+db, cb+da)]$,

pero por teorema 7.f. (conmutatividad de la multiplicación en ω), y también por el teorema 6.d. (conmutatividad de la adición en ω),

$[(ac+bd, ad+bc)] = [(ca+db, cb+da)]$

Luego $[(a,b)] \otimes_{\mathbb{Z}} [(c,d)] = [(c,d)] \otimes_{\mathbb{Z}} [(a,b)]$.

Las demostraciones de b. y c. se dejan como ejercicios.

Observaciones.

Se puede demostrar que no existe una "clase inversa" para cada clase.

Se puede demostrar la distributividad de la multiplicación, respecto de la adición, es decir que, la adición distribuye a la multiplicación en $\mathbb{Z}$.

Orden en $\mathbb{Z} = {}^{\omega\times\omega}/_{\sim}$

El orden se puede definir como $[(a,b)] \leq_{\mathbb{Z}} [(c,d)] \Leftrightarrow a+d \leq b+c$

Y se lee como $[(a,b)]$ "es menor o igual que" $[(c,d)]$.

Determine la veracidad o la falsedad de:

- $[(5,2)] \leq_{\mathbb{Z}} [(5,9)]$
- $[(6,7)] \leq_{\mathbb{Z}} [(4,2)]$
- $[(5,2)] \leq_{\mathbb{Z}} [(7,4)]$

Enteros positivos

$\mathbb{Z}^+ = \{[(m,n)] :\ \ m > n\}$, estos elementos $[(m,n)]$ se dicen positivos y se denotan como $[(m,n)] > 0$.

Teorema 18.

El par $(\mathbb{Z}, \leq_{\mathbb{Z}})$ es un conjunto parcialmente ordenado (CPO), es decir, la relación "menor o igual que" en $\mathbb{Z}$, verifica que es:

a. $[(m,n)] \leq_{\mathbb{Z}} [(m,n)], \ \forall n,m \in \omega$
(reflexividad)

b. $([(m,n)] \leq_{\mathbb{Z}} [(a,b)] \ \wedge \ [(a,b)] \leq_{\mathbb{Z}} [(m,n)]) \Rightarrow ([(m,n)] = [(a,b)])$
(antisimetría)

c. $([(m,n)] \leq_{\mathbb{Z}} [(a,b)] \ \wedge \ [(a,b)] \leq_{\mathbb{Z}} [(p,q)]) \Rightarrow ([(m,n)] \leq_{\mathbb{Z}} [(p,q)])$
(transitividad)

Demostración

a. $[(m,n)] \leq_{\mathbb{Z}} [(m,n)], \ \forall n,m \in \omega$ es verdadera, ya que $m + n \leq n + m$ lo es, por el teorema 6.d. o por el teorema 10.a. (antisimetría del orden en ω)

Las demostraciones b. y c. se dejan como ejercicio.

Teorema 19.

El par $(\mathbb{Z}, \leq_{\mathbb{Z}})$ es un conjunto totalmente ordenado (CTO), es decir, el par $(\mathbb{Z}, \leq_{\mathbb{Z}})$ es CPO, y la relación "menor o igual que" en $\mathbb{Z}$, verifica que:

Si $\forall [(m,n)], [(a,b)] \in \mathbb{Z}, \ \ [(m,n)] \neq [(a,b)]$.

Entonces, $[(m,n)] \leq_{\mathbb{Z}} [(a,b)]$, o bien $[(a,b)] \leq_{\mathbb{Z}} [(m,n)]$.

Demostración

Aplique el orden total en ω, es decir el teorema 12.

Construcción de los racionales.

$\Leftrightarrow p \div q = a \div b$

Definición.

En el conjunto $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, se define la relación " $\sim$ ", como:

$$(p,q)\sim(a,b) \Leftrightarrow p\cdot b = q\cdot a$$

Teorema 20.

La relación " $\sim$ " en $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ es relación de equivalencia.

Demostración.

Para demostrar que es relación de equivalencia, debemos probar que, $\forall p,q,a,b,r,s \in \mathbb{Z}$, se verifican:

a. $(p,q)\sim(p,q)$, es decir, que es refleja.
b. $(p,q)\sim(a,b) \implies (a,b)\sim(p,q)$, es decir, que es simétrica.
c. $(p,q)\sim(a,b) \wedge (a,b)\sim(r,s) \implies (p,q)\sim(r,s)$, es decir, que es transitiva.

En efecto:

Demostración de a.

$(p,q)\sim(p,q) \Leftrightarrow p\cdot q = q\cdot p$ es verdadero por la conmutatividad de la multiplicación en $\mathbb{Z}$, por teorema 17.a.

Las demostraciones de b. y c. se dejan como ejercicios.

Observación.

Determinemos las clases de equivalencia de los elementos de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ y el conjunto cuociente $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\backslash\{0\}/_{\sim}$.

Nota.

Clase de equivalencia se denota y define como

$$[(p,q)] = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\backslash\{0\} : \ (x,y)\sim(p,q)\}$$

Ejemplos.

1) La clase de equivalencia

$$\begin{aligned}[(5,2)] &= \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\backslash\{0\} : \ (x,y)\sim(5,2)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\backslash\{0\} : \ x\cdot 2 = y\cdot 5\} \\ &= \{(5,2),(10,4),(15,6),\dots,(-5,-2),(-10,-4),\dots\}\end{aligned}$$

2) La clase de equivalencia

$$\begin{aligned}[(2,3)] &= \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\backslash\{0\} : \ (x,y)\sim(2,3)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\backslash\{0\} : \ x\cdot 3 = y\cdot 2\} \\ &= \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \dots\}\end{aligned}$$

Identifique algunos de sus elementos.

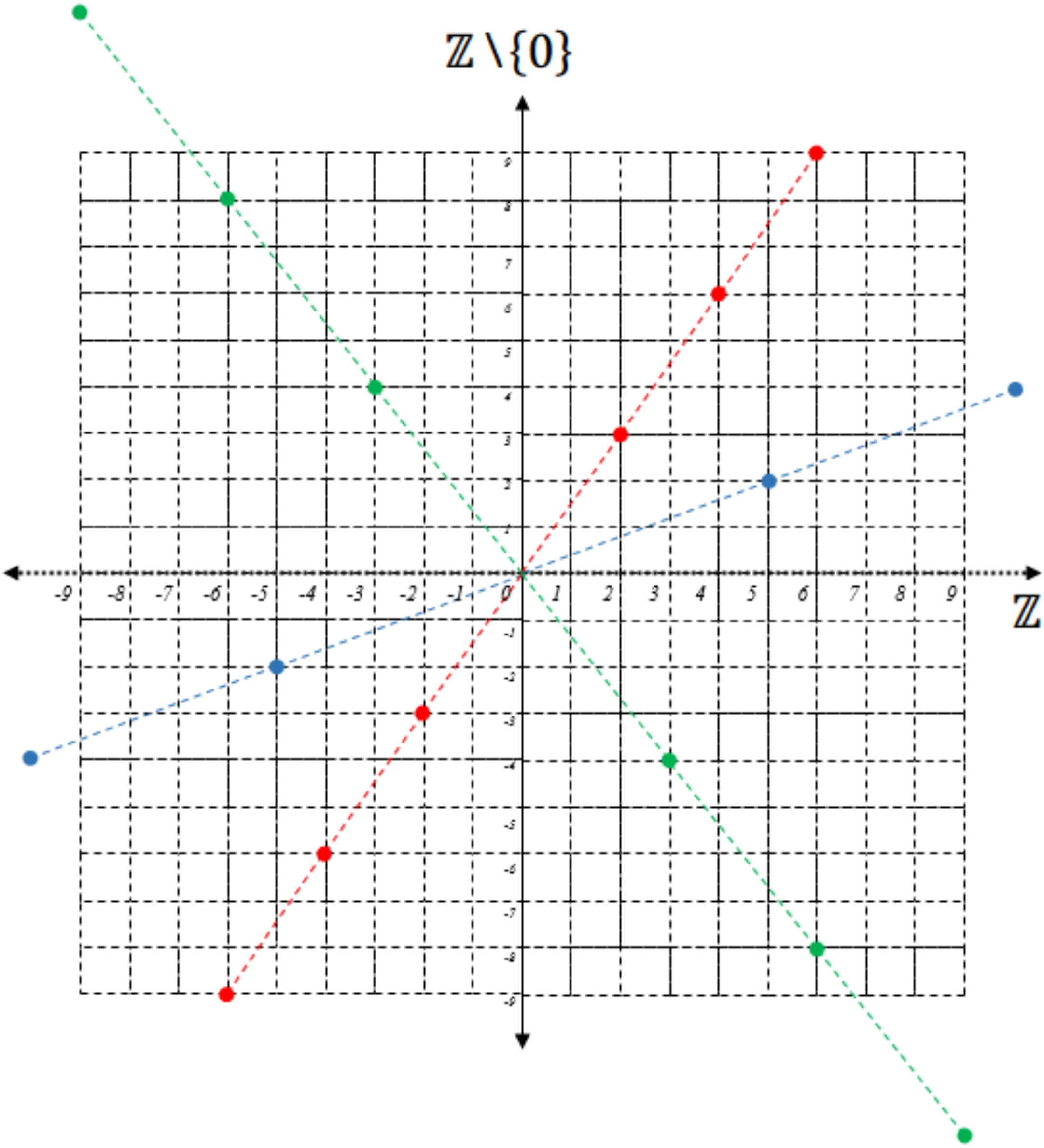
3) La clase de equivalencia

$$[(-3,4)] = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\backslash\{0\} : \ (x,y)\sim(-3,4)\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\backslash\{0\} : \ x \cdot 4 = y \cdot (-3)\ \}$$
$$= \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\}$$

Identifique algunos de sus elementos.

En el siguiente diagrama $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ están representadas las clases de equivalencia determinadas en los ejemplos anteriores, esto es, las clases: $[(5,2)], [(2,3)]$ y $[(-3,4)]$.

1) Represente otras clases en el mismo diagrama.
2) Determine el mejor representante para cada una de las clases.



Notación:

- $[(p,q)] = p \cdot q^{-1} = \frac{p}{q}$; $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.
- $[(p,1)] = p$; $p \in \mathbb{Z}$.
- $[(1,q)] = q^{-1} = \frac{1}{q}$; $q \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ "racional, inverso de q "

Definición.

$$\mathbb{Q} = {}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\backslash\{0\}}/_{\sim}$$

Aritmética y orden en los racionales.

Adición:

Se define operación adición como la función

$$\begin{array}{rcccl} \oplus_{\mathbb{Q}} : & \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & ([(a,b)],[(c,d)]) & \longmapsto & [(a,b)] \oplus_{\mathbb{Q}} [(c,d)] \end{array}$$

donde $[(a,b)] \oplus_{\mathbb{Q}} [(c,d)] = [(ad+bc,bd)]$, llamada suma de $[(a,b)]$ con $[(c,d)]$

Determine:

- $[(5,2)] \oplus_{\mathbb{Q}} [(5,9)] =$
- $[(5,-2)] \oplus_{\mathbb{Q}} [(-2,9)] =$

Teorema 21.

$(\mathbb{Q}, \oplus_{\mathbb{Q}})$ es un grupo abeliano.

Demostración.

Para demostrar que es grupo abeliano, debemos probar que, $\forall a,b,c,d,e,f \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0, d \neq 0$ y $f \neq 0$ se verifican:

a. $[(a,b)] \oplus_{\mathbb{Q}} [(c,d)] = [(c,d)] \oplus_{\mathbb{Q}} [(a,b)]$, es decir, que es conmutativa.
b. $([(a,b)] \oplus_{\mathbb{Q}} [(c,d)]) \oplus_{\mathbb{Q}} [(e,f)] = [(a,b)] \oplus_{\mathbb{Q}} ([(c,d)] \oplus_{\mathbb{Q}} [(e,f)])$, es decir, que es asociativa.
c. $\exists\, [(x,y)] \in \mathbb{Q}$, tal que $[(a,b)] \oplus_{\mathbb{Q}} [(x,y)] = [(a,b)]$, es decir, que existe una "clase cero".
d. $\forall\, [(a,b)] \in \mathbb{Q}$, $\exists\, [(x,y)] \in \mathbb{Q}$, tal que $[(a,b)] \oplus_{\mathbb{Q}} [(x,y)]$ es la "clase cero", es decir, que existe una "clase opuesta" para cada.

En efecto:

Demostración de a.

$[(a,b)] \oplus_{\mathbb{Q}} [(c,d)] = [(ad+bc,bd)]$,
$[(c,d)] \oplus_{\mathbb{Z}} [(a,b)] = [(cb+da,db)]$,

Pero por la conmutatividad de la multiplicación y la adición en $\mathbb{Z}$ (teoremas 17.a. y 16.a.) tenemos que $[(ad+bc, bd)] = [(cb+da, db)]$
Luego $[(a,b)] \oplus_{\mathbb{Z}} [(c,d)] = [(c,d)] \oplus_{\mathbb{Z}} [(a,b)]$.
Las demostraciones de b., c. y d. se dejan como ejercicios.

Multiplicación:

Se define operación multiplicación como la función

$$\begin{array}{cccc} \otimes_{\mathbb{Q}} & : & \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & & ([(a,b)],[(c,d)]) & \longmapsto & [(a,b)] \otimes_{\mathbb{Q}} [(c,d)] \end{array}$$

donde $[(a,b)] \otimes_{\mathbb{Q}} [(c,d)] = [(ac, bd)]$, llamado producto de $[(a,b)]$ con $[(c,d)]$

Determine:

- $[(5,2)] \otimes_{\mathbb{Q}} [(5,9)] =$
- $[(-1,2)] \otimes_{\mathbb{Q}} [(5,-2)] =$

Teorema 22.

$(\mathbb{Q}\ ,\ \otimes_{\mathbb{Q}})$ es un grupo abeliano.

Demostración.

Para demostrar que es grupo abeliano, debemos probar que, $\forall a,b,c,d,e,f \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0, d \neq 0\ y\ f \neq 0$ se verifican:

a. $[(a,b)] \otimes_{\mathbb{Q}} [(c,d)] = [(c,d)] \otimes_{\mathbb{Q}} [(a,b)]$, es decir, que es conmutativa.
b. $\big([(a,b)] \otimes_{\mathbb{Q}} [(c,d)]\big) \otimes_{\mathbb{Q}} [(e,f)] = [(a,b)] \otimes_{\mathbb{Q}} \big([(c,d)] \otimes_{\mathbb{Q}} [(e,f)]\big)$, es decir, que es asociativa.
c. $\exists\ [(x,y)] \in \mathbb{Q}$, tal que $[(a,b)] \otimes_{\mathbb{Q}} [(x,y)] = [(a,b)]$, es decir, que existe una "clase unidad".
d. $\forall\ [(a,b)] \in \mathbb{Q}$, excepto la "clase cero", $\exists\ [(x,y)] \in \mathbb{Q}$, tal que $[(a,b)] \otimes_{\mathbb{Q}} [(x,y)]$ es la "clase unidad", es decir, que existe una "clase inversa" para cada clase, distinta a la "clase cero".

En efecto:
Demostración de a.

$[(a,b)] \otimes_{\mathbb{Q}} [(c,d)] = [(ac, bd)]$,
$[(c,d)] \otimes_{\mathbb{Q}} [(a,b)] = [(ca, db)]$,
pero por teorema 17.a. (conmutatividad de la multiplicación en $\mathbb{Z}$), $[(ac,bd)] = [(ca,db)]$
Luego $[(a,b)] \otimes_{\mathbb{Q}} [(c,d)] = [(c,d)] \otimes_{\mathbb{Q}} [(a,b)]$.

Las demostraciones de b. c. y d. se dejan como ejercicios.

Observación.

Se puede demostrar la distributividad de la multiplicación, respecto de la adición, es decir que, la adición distribuye a la multiplicación en $\mathbb{Q}$.

Orden en $\mathbb{Q} = {}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{0\}}/_{\sim}$

El orden se puede definir como: $[(a,b)] \leq_{\mathbb{Q}} [(c,d)] \Leftrightarrow (ab)(dd) \leq (cd)(bb)$
Y se lee como $[(a,b)]$ "es menor o igual que" $[(c,d)]$.

Nota.

Se puede definir el orden de manera más simple, cuando b y d, son del mismo signo $(bd > 0)$ o de signo contrario $(bd < 0)$.

Determine la veracidad o la falsedad de:

- $[(5,2)] \leq_{\mathbb{Q}} [(2,3)]$
- $[(-3,4)] \leq_{\mathbb{Q}} [(5,2)]$
- $[(2,3)] \leq_{\mathbb{Q}} [(-3,4)]$

Racionales positivos

$\mathbb{Q}^{+} = \{[(p,q)] : \ pq > 0\}$, estos elementos $[(p,q)]$ se dicen positivos y se denotan también como $[(p,q)] > 0$.

Teorema 23.

El par $(\mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}})$ es un conjunto parcialmente ordenado (CPO), es decir, la relación "menor o igual que" en $\mathbb{Q}$, verifica que es refleja, antisimétrica y transitiva:

a. $[(p,q)] \leq_{\mathbb{Q}} [(p,q)]$, $\forall p,q \in \mathbb{Z}$, con $q \neq 0$.
b. $\big([(p,q)] \leq_{\mathbb{Q}} [(a,b)] \ \wedge \ [(a,b)] \leq_{\mathbb{Q}} [(p,q)]\big) \Rightarrow ([(p,q)] = [(a,b)])$
c. $\big([(m,n)] \leq_{\mathbb{Q}} [(a,b)] \ \wedge \ [(a,b)] \leq_{\mathbb{Q}} [(p,q)]\big) \Rightarrow \big([(m,n)] \leq_{\mathbb{Q}} [(p,q)]\big)$

Demostración

a. $[(p,q)] \leq_{\mathbb{Q}} [(p,q)]$, $\forall p,q \in \mathbb{Z}$, con $q \neq 0$.es verdadera, ya que $(pq)(pq) \leq (pq)(pq)$ lo es, por el teorema 18.a. o por el teorema 18.b. (antisimetria del orden en $\mathbb{Z}$)

Las demostraciones b. y c. se dejan como ejercicio.

Teorema 24.

El par $(\mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}})$ es un conjunto totalmente ordenado (CTO), es decir, el par $(\mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}})$ es CPO y la relación "menor o igual que" en $\mathbb{Q}$, verifica que:

Si $\forall [(p,q)], [(a,b)] \in \mathbb{Q}$, $[(p,q)] \neq [(a,b)]$.
Entonces, $[(p,q)] \leq_{\mathbb{Q}} [(a,b)]$, o bien $[(a,b)] \leq_{\mathbb{Q}} [(p,q)]$.

Demostración

Aplique el orden total en $\mathbb{Z}$, es decir el teorema 19.

Densidad en los racionales

Si $s,r \in \mathbb{Q}$, con $s <_{\mathbb{Q}} r$, entonces $\frac{s+r}{2} \in \mathbb{Q}$ y $s <_{\mathbb{Q}} \frac{s+r}{2} <_{\mathbb{Q}} r$.

Cortaduras de Dedekind

Sabemos que los números racionales se extienden a lo largo de toda la recta y que son densos en ella, es decir, hay números racionales "tan cerca uno de otro, como uno quiera" de cualquier punto sobre la recta. Sin embargo, es sabido también que hay puntos sobre la recta, por ejemplo, el correspondiente al $\sqrt{2}$, que no es ningún número racional, aunque se pueda construir geométricamente, usando el Teorema de Pitágoras con un triángulo de catetos iguales a 1.

Aunque los números racionales $\mathbb{Q}$ tienen muy buenas propiedades, las de "cuerpo totalmente ordenado y denso", tiene un defecto importante, la presencia de muchos "agujeros", los que provocan que algunas operaciones no tienen inversas en $\mathbb{Q}$.

El siguiente teorema presenta un defecto de $\mathbb{Q}$, y de manera formal.

Teorema 25.

$$\sim(\exists x \in \mathbb{Q}\,,\; x^2 - 2 = 0\,), \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

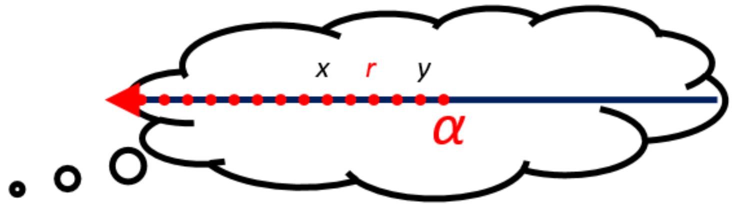
Demostración.

Suponga que existe un racional $x = [(p,q)] = \frac{p}{q}$, irreductible y tal que $x^2 = 2$ (irreductible en el sentido que los enteros, p y q no tienen factores comunes), luego $p^2 = 2\,q^2$, lo que implica que p^2 es par y por lo tanto, p también es par. Entonces podemos escribir $p = 2k$, para algún k entero, lo que implica que $p^2 = 4\,k^2 = 2\,q^2$, por lo tanto, $q^2 = 2\,k^2$, luego q^2 es par y q también es par, lo que contradice que p y q sean enteros irreductibles.

La siguiente definición ya de hecho, introduce los números reales. Sin embargo, esta definición es muy técnica y se debe recorrer un camino muy largo para ver (y probar) que las cortaduras realmente pueden ser tratadas como números reales.

De modo que serán llamadas números sólo después de definir y demostrar las propiedades aritméticas y de orden en el conjunto de las cortaduras.

La presentación de los números reales que desarrollaremos fue propuesta por primera vez por Dedekind en 1888. Esta no es la única manera de construir los números reales, Cantor lo propuso con sucesiones de Cauchy, sin embargo requiere de conocimientos de análisis, en cambio la de Dedekind es netamente conjuntista o algebraica.



Definición.

Una cortadura de Dedekind o simplemente una cortadura (izquierda) en los números racionales es un subconjunto α de $\mathbb{Q}$ que cumple las siguientes condiciones:

1) $\alpha \neq \emptyset$ y $\alpha \neq \mathbb{Q}$.
2) Si $r \in \alpha,\ \forall x \in \mathbb{Q},\ x <_{\mathbb{Q}} r$, entonces $x \in \alpha$.
3) Si $r \in \alpha$, entonces $\exists y \in \alpha,\ r <_{\mathbb{Q}} y$.

Observación.

Las condiciones anteriores indican que:

1) α subconjunto propio de $\mathbb{Q}$.
2) Si un racional $r \in \alpha$, entonces todos los racionales más pequeños también están en α.
3) α no tiene un elemento máximo.

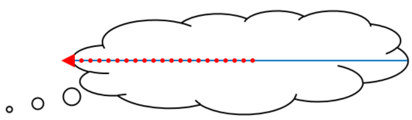
Ejemplos.

1) El conjunto vacío no es cortadura.
2) Si $\alpha = \mathbb{Q}$, entonces α no es cortadura.
3) Si $s \in \mathbb{Q}$, entonces $\alpha_r = \{x \in \mathbb{Q} :\ x <_{\mathbb{Q}} s\ \}$ es una cortadura.
4) $\beta = \{x \in \mathbb{Q} :\ x^2 <_{\mathbb{Q}} 2\ \}$ no es cortadura.
5) $\gamma = \{x \in \mathbb{Q} :\ x <_{\mathbb{Q}} 0 \lor x^2 <_{\mathbb{Q}} 2\ \} = \alpha_0 \cup \{x \in \mathbb{Q} :\ x^2 <_{\mathbb{Q}} 2\ \}$ es cortadura.

Observación.

Una cortadura de Dedekind izquierda (o simplemente cortadura) es, intuitivamente, un subconjunto de los racionales que se parece a un rayo izquierdo. Para un número $s \in \mathbb{Q}$

$\alpha_s = \{x \in \mathbb{Q} :\ x <_{\mathbb{Q}} s\ \}$.



De hecho, si tuviéramos el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, entonces cada cortadura sería un conjunto de tipo $]-\infty, c[\cap \mathbb{Q}$, para algún $c \in \mathbb{R}$.

Demostremos que $\alpha_s = \{x \in \mathbb{Q} : \ x <_{\mathbb{Q}} s \}$ efectivamente es una cortadura.

Es decir que, α_s es un subconjunto de $\mathbb{Q}$ que cumple las siguientes condiciones:
1) $\alpha_s \neq \emptyset$ y $\alpha_s \neq \mathbb{Q}$.
2) Si $r \in \alpha_s$, $\forall x \in \mathbb{Q}$, $x <_{\mathbb{Q}} r$, entonces $x \in \alpha_s$.
3) Si $r \in \alpha_s$, entonces $\exists y \in \alpha_s$, $r <_{\mathbb{Q}} y$.

En efecto:

1) $s - 1 <_{\mathbb{Q}} s$ y como $s - 1 \in \mathbb{Q}$, $s - 1 \in \alpha_s$, luego $\alpha_s \neq \emptyset$.
   $s + 1 \in \mathbb{Q}$ pero $s <_{\mathbb{Q}} s + 1$, luego $s + 1 \notin \alpha_s$, entonces $\alpha_s \neq \mathbb{Q}$.
2) Sea $r \in \alpha_s \Leftrightarrow r \in \mathbb{Q}$, $r <_{\mathbb{Q}} s$
   $\forall x \in \mathbb{Q}$, $x <_{\mathbb{Q}} r \implies x <_{\mathbb{Q}} s$ por transitividad en los racionales, luego $x \in \alpha_s$.
3) Sea $r \in \alpha_s \Leftrightarrow r \in \mathbb{Q}$, $r <_{\mathbb{Q}} s$
   Por la densidad de $\mathbb{Q}$, $\exists y = \frac{r+s}{2} \in \mathbb{Q}$ tal que $r <_{\mathbb{Q}} \frac{r+s}{2} <_{\mathbb{Q}} s$, luego $y \in \alpha_s$, y además verifica que $r <_{\mathbb{Q}} y$, es decir, α_s no tiene elemento maximal.

   De 1), 2) y 3) se concluye que α_s es cortadura.

Definición.

Se define el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, como

$$\mathbb{R} = \{\alpha \subset \mathbb{Q} : \ \alpha \ es \ cortadura \ \}.$$

Hay una obvia inyección de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, a saber $f : \mathbb{Q} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$ definida como $f(s) = \alpha_s = \{x \in \mathbb{Q} : \ x <_{\mathbb{Q}} s \}$, de esta forma, al igual que los naturales pueden considerarse contenidos dentro de los enteros quienes están dentro de los racionales, estos últimos están contenidos dentro de los reales. Es decir: $\omega \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Cuando se dota a los reales de una estructura algebraica y de orden, veremos que esta copia de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ respeta todas las propiedades esenciales de $\mathbb{Q}$.

Las cortaduras del tipo α_s con $s \in \mathbb{Q}$ se llaman cortaduras racionales. Las cortaduras que no son de ese tipo se llaman cortaduras irracionales o números irracionales.

Orden y aritmética en los reales.

Orden en $\mathbb{R}$.

La relación de orden " $\leq_{\mathbb{R}}$ " definida como " $\alpha \leq_{\mathbb{R}} \beta$ " si y solo si $\alpha \subset \beta$.

Teorema 26.

El par $(\mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}})$ es un conjunto parcialmente ordenado (CPO), es decir, la relación "menor o igual que" en $\mathbb{R}$, verifica que es:

a. $\alpha \leq_{\mathbb{R}} \alpha,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$. (reflexividad)
b. $(\alpha \leq_{\mathbb{R}} \beta \ \wedge\ \beta \leq_{\mathbb{R}} \alpha) \Rightarrow (\alpha = \beta)$ (antisimetría)
c. $(\alpha \leq_{\mathbb{R}} \beta \ \wedge\ \beta \leq_{\mathbb{R}} \gamma) \Rightarrow (\alpha \leq_{\mathbb{R}} \gamma)$ (transitividad)

Demostración

a. $\alpha \ \leq_{\mathbb{Q}} \alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, ya que $\alpha \subset \alpha$.

Las demostraciones b. y c. se dejan como ejercicio.

Teorema 27.

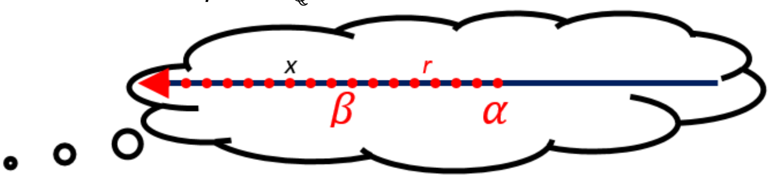
El par $(\mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}})$ es un conjunto totalmente ordenado (CTO), es decir, el par $(\mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}})$ es CPO y la relación "menor o igual que" en $\mathbb{R}$, verifica que:

Si $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \ \alpha \neq \beta$. Entonces, $\alpha \leq_{\mathbb{R}} \beta$, o bien $\beta \leq_{\mathbb{R}} \alpha$.

Demostración

Si $\alpha \neq \beta$, entonces existe un racional r, tal que $r \in (\alpha - \beta)$ o bien $r \in (\beta - \alpha)$.

a. Si $r \in (\alpha - \beta)$, entonces $\forall x \in \beta, x <_{\mathbb{Q}} r$,



Luego por la parte 2 de la definición de cortadura para α, $x \in \alpha$.
Así $\beta \subset \alpha$, y por lo tanto, $\beta \leq_{\mathbb{R}} \alpha$.

b. Si $r \in (\beta - \alpha)$, análogamente se concluye que $\alpha \leq_{\mathbb{R}} \beta$.

Por lo tanto, de a. y b., $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \ \alpha \neq \beta$. Entonces, $\alpha \leq_{\mathbb{R}} \beta$, o bien $\beta \leq_{\mathbb{R}} \alpha$.

Observación.

Este orden también es denso y sin primer ni último elemento en $\mathbb{R}$.

Definición.

Orden estricto, " $<_{\mathbb{R}}$ " se define como " $\alpha <_{\mathbb{R}} \beta$ " si y solo si $\alpha \subset \beta\ \wedge \alpha \neq \beta$.

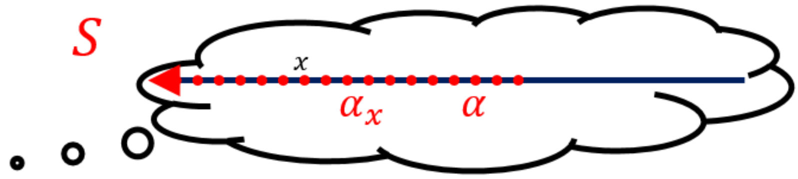
Teorema 28.

Si S es un conjunto de cortaduras, $S \neq \emptyset$ y acotado superiormente, entonces S tiene una cota superior mínima. Conocido como el **"axioma del supremo"** en la teoría axiomática del cuerpo ordenado y completo de los números reales.

Demostración.

Sea S un conjunto de cortaduras, $S \neq \emptyset$ y acotado superiormente.

Sea $\beta = \{x \in \mathbb{Q} : \alpha_x <_{\mathbb{R}} \alpha,\ algún\ \alpha \in S\}$



Probaremos que:

a. β es cortadura.
b. β es cota superior de S.
c. β es la mínima cota superior de S.

En efecto:

a. Para demostrar que es cortadura, debemos verificar la definición.
   1) $\beta \subset \mathbb{Q}, \beta \neq \emptyset\ , \beta \neq \mathbb{Q}$.
   2) Si $r \in \beta$, entonces $\alpha_r <_{\mathbb{R}} \alpha,\ algún\ \alpha \in S$. Luego $\forall x \in \mathbb{Q},\ x <_{\mathbb{Q}} r$, entonces $\alpha_x \leq_{\mathbb{R}} \alpha_r$, así $\alpha_x <_{\mathbb{R}} \alpha$, por lo tanto $x \in \beta$.
   3) Si m fuera máximo de β, se debe cumplir que $\alpha_m <_{\mathbb{R}} \alpha$, algún $\alpha \in S$, es decir, $m \in \alpha$ y sería máximo de α también, pero α es cortadura y no tiene máximo, lo que es contradictorio.

   De 1., 2. y 3., β es cortadura.
b. Si $\alpha \in S$, entonces por definición $\forall x \in \alpha \Rightarrow x \in \beta$, luego $\alpha \subset \beta \Leftrightarrow \alpha \leq_{\mathbb{R}} \beta$, por lo tanto, β es cota superior de S.
c. Si γ es otra cota superior de S, implica que $\alpha \leq_{\mathbb{R}} \gamma$, $\forall \alpha \in S$, luego que $\alpha \subset \gamma$, $\forall \alpha \in S$. Luego si $x \in \beta$, entonces $x \in \gamma$, es decir, $\beta \subset \gamma$, por lo tanto $\beta \leq_{\mathbb{R}} \gamma$.
   Por lo tanto β es la menor cota superior, es decir, $\beta = \sup S$.

Aritmética en $\mathbb{R}$

Definición.

Si α y β son cortaduras, entonces se define la suma de α con β, como sigue:

$\alpha + \beta = \{z : z = x + y,\ \ algún\ x \in \alpha,\ \ algún\ y \in \beta\ \}$.

Definiciones.

1) $\mathcal{O} = \alpha_0 = \{x \in \mathbb{Q} :\ \ x <_{\mathbb{Q}} 0\}$.
2) $-\alpha = \{x \in \mathbb{Q} :\ -x \notin \alpha,\ -x\ no\ es\ elemento\ mínimo\ de\ \ \mathbb{Q}\backslash\alpha\ \}$.
3) $\mathcal{P} = \{\alpha : \alpha\ es\ cortadura\ \ y\ \ \mathcal{O} <_{\mathbb{R}} \alpha\ \}$. (cortaduras positivas)

Teorema 29.

Si α , β y γ son cortaduras, entonces

a. $\alpha+\beta$ es cortadura.
b. $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.
c. $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$.
d. $\alpha+\mathcal{O}=\alpha$.
e. $-\alpha$ es cortadura y $\alpha+(-\alpha)=\mathcal{O}$.

Demostración.

a. Para demostrar que $\alpha+\beta$ es cortadura, se debemos probar que se verifica la definición. Es decir que $\alpha+\beta$ cumple las siguientes condiciones:
   1) $\alpha+\beta\neq\emptyset$ y $\alpha+\beta\neq\mathbb{Q}$ ($\alpha+\beta$ subconjunto propio de $\mathbb{Q}$).
   2) Si $r\in\alpha+\beta$, $\forall z\in\mathbb{Q}$, $z<_{\mathbb{Q}} r$, entonces $z\in\alpha+\beta$.
   3) Si $w\in\alpha+\beta$, entonces $\exists z\in\alpha+\beta$, $w<_{\mathbb{Q}} z$ ($\alpha+\beta$ no tiene un elemento máximo).

   En efecto:
   1) Como $\alpha\neq\emptyset$ y $\beta\neq\emptyset$, existen $x\in\alpha$ y $y\in\beta$, entonces $x+y\in\alpha+\beta$, por lo tanto $\alpha+\beta\neq\emptyset$.
      Como $\alpha\neq\mathbb{Q}$ y $\beta\neq\mathbb{Q}$, existen $r,s\in\mathbb{Q}$, tal que $\forall x\in\alpha$ y $\forall y\in\beta$, $x<_{\mathbb{Q}} r$, $y<_{\mathbb{Q}} s$, por lo tanto $x+y<_{\mathbb{Q}} r+s$, entonces $r+s\notin\alpha+\beta$ por lo tanto $\alpha+\beta\neq\mathbb{Q}$.
   2) Si $z\leq_{\mathbb{Q}} r=x+y\in\alpha+\beta$, entonces $z-x\leq_{\mathbb{Q}} r-x=y\in\beta$ y como β es cortadura, $z-x\in\beta$, luego $z=x+(w-x)\in\alpha+\beta$.
   3) Si $w\in\alpha+\beta$, entonces $w=r+s$ con $r\in\alpha, s\in\beta$. Como α y β son cortaduras $\exists x\in\alpha,\ r<_{\mathbb{Q}} x$. $\exists y\in\alpha,\ s<_{\mathbb{Q}} y$, entonces para $w=r+s\in\alpha+\beta$, existe $z=x+y\in\alpha+\beta$ tal que $w=r+s<_{\mathbb{Q}} x+y=z$, es decir $\alpha+\beta$ no tiene un elemento máximo.

Las demostraciones de b., c., d, y e., se dejan como ejercicios.

Teorema 30.

a. Si $\alpha,\beta\in\mathcal{P}$, entonces $\alpha+\beta\in\mathcal{P}$.
b. Si α es cortadura, entonces $\alpha=\mathcal{O}\ \underline{\vee}\ \alpha\in\mathcal{P}\ \underline{\vee}\ (-\alpha)\in\mathcal{P}$.
c. Si α , β y γ son cortaduras y $\alpha<_{\mathbb{R}}\beta$, entonces $\alpha+\gamma<_{\mathbb{R}}\beta+\gamma$.

Demostración.

a. Si $\alpha,\beta\in\mathcal{P}$, α,β son cortaduras y $\mathcal{O}<_{\mathbb{R}}\alpha$, $\mathcal{O}<_{\mathbb{R}}\beta$, entonces $\mathcal{O}<_{\mathbb{R}}\alpha+\beta$, ya que $\mathcal{O}\subset\alpha$, $\mathcal{O}\subset\beta$ implican que $\mathcal{O}\subset\alpha+\beta$. Por lo tanto $\alpha+\ \beta\in\mathcal{P}$.

Las demostraciones de b. y c., se dejan como ejercicios.

Definición.

Si α y β son cortaduras, con $\alpha,\beta\in\mathcal{P}$, entonces se define el producto de α con β, como sigue:

$\alpha \cdot \beta = \{ z \in \mathbb{Q} : z \leq_{\mathbb{Q}} 0 \ \vee z = xy, algún\ x \in \alpha, algún\ y \in \beta, con\ 0 <_{\mathbb{Q}} x, 0 <_{\mathbb{Q}} y \}$.

Teorema 31.

Si α y β son cortaduras, con $\alpha, \beta \in \mathcal{P}$, entonces

a. $\alpha \cdot \beta$ es cortadura.

b. $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

Demostración.

a. Para demostrar que $\alpha \cdot \beta$ es cortadura, se debemos probar que se verifica la definición. Es decir que $\alpha \cdot \beta$ cumple las siguientes condiciones:

1) $\alpha \cdot \beta \neq \emptyset$ y $\alpha \cdot \beta \neq \mathbb{Q}$ ($\alpha \cdot \beta$ subconjunto propio de $\mathbb{Q}$).
2) Si $r \in \alpha \cdot \beta$, $\forall z \in \mathbb{Q}$, $z <_{\mathbb{Q}} r$, entonces $z \in \alpha \cdot \beta$.
3) Si $w \in \alpha \cdot \beta$, entonces $\exists z \in \alpha \cdot \beta$, $w <_{\mathbb{Q}} z$ ($\alpha \cdot \beta$ no tiene un elemento máximo).

En efecto:

1) Como $\alpha \neq \emptyset$ y $\beta \neq \emptyset$, existen $x \in \alpha$ y $y \in \beta$, con $0 <_{\mathbb{Q}} x$, $0 <_{\mathbb{Q}} y$, entonces $z = xy \in \alpha \cdot \beta$, por lo tanto $\alpha \cdot \beta \neq \emptyset$.

Como $\alpha \neq \mathbb{Q}$ y $\beta \neq \mathbb{Q}$, existen $r, s \in \mathbb{Q}$, tal que $\forall x \in \alpha$ y $\forall y \in \beta$, $x <_{\mathbb{Q}} r$, $y <_{\mathbb{Q}} s$, por lo tanto $xy <_{\mathbb{Q}} rs$, entonces $rs \notin \alpha \cdot \beta$ por lo tanto $\alpha \cdot \beta \neq \mathbb{Q}$.

2) Sea $r \in \alpha \cdot \beta$. Para cualquier $z \in \mathbb{Q}$, $z <_{\mathbb{Q}} r$.
Si $z \leq_{\mathbb{Q}} 0$, entonces $z \in \alpha \cdot \beta$.
Si $0 <_{\mathbb{Q}} z$, entonces $0 <_{\mathbb{Q}} r$. Por lo tanto $r = xy$ algún $x \in \alpha$, algún $y \in \beta$.
Luego $z = \frac{zr}{r} = \frac{z\,xy}{r} = \left(\frac{z}{r}\,x\right) y$, como $0 <_{\mathbb{Q}} z <_{\mathbb{Q}} r$, entonces $\frac{z}{r} <_{\mathbb{Q}} 1$.
Por lo tanto $\frac{z}{r}\, x \in \alpha$, luego $z \in \alpha \cdot \beta$.

3) Sea $w \in \alpha \cdot \beta$, entonces:
Si $w \leq_{\mathbb{Q}} 0$, entonces existe algún $x \in \alpha$, con $0 <_{\mathbb{Q}} x$ y algún $y \in \beta$, con $0 <_{\mathbb{Q}} y$, luego $z = xy \in \alpha \cdot \beta$ y $w \leq_{\mathbb{Q}} z$.
Supongamos ahora que $0 \leq_{\mathbb{Q}} w$, entonces $w = xy$ para algún $x \in \alpha$, con $0 <_{\mathbb{Q}} x$, algún $y \in \beta$, con $0 <_{\mathbb{Q}} y$. Además α contiene algún $\bar{x}$, $x <_{\mathbb{Q}} \bar{x}$.
Ahora si $z = \bar{x}y$, entonces $w = xy <_{\mathbb{Q}} z$ y $z \in \alpha \cdot \beta$.
Luego $\alpha \cdot \beta$ no tiene un elemento máximo.

b. Para demostrar que $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ se recurre a la conmutatividad de los racionales positivos. En efecto:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \beta &= \{ z \in \mathbb{Q} : z \leq_{\mathbb{Q}} 0 \ \vee z = xy, algún\ x \in \alpha, algún\ y \in \beta, con\ 0 <_{\mathbb{Q}} x, 0 <_{\mathbb{Q}} y \} \\ &= \{ z \in \mathbb{Q} : z \leq_{\mathbb{Q}} 0 \ \vee z = yx, algún\ y \in \beta, algún\ x \in \alpha\ , con\ 0 <_{\mathbb{Q}} y, 0 <_{\mathbb{Q}} x \} \\ &= \beta \cdot \alpha. \end{aligned}$$

Definición.

Si α es cortadura, entonces se define

1) $|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & si\ \alpha \in \mathcal{P}\ \vee \alpha = \mathcal{O}. \\ -\alpha, & si\ (-\alpha) \in \mathcal{P}. \end{cases}$

2) $\alpha \cdot \beta = \begin{cases} \mathcal{O}, & si \ \ \alpha = \mathcal{O} \ \vee \beta = \mathcal{O} \\ |\alpha| \cdot |\beta|, & si \ \ \alpha, \beta \in \mathcal{P} \ \vee \ (-\alpha), (-\beta) \in \mathcal{P} \\ -(|\alpha| \cdot |\beta|), & si \ \ \alpha, (-\beta) \in \mathcal{P} \ \vee \ (-\alpha), \beta \in \mathcal{P} \end{cases}$

3) $\mathcal{I} = \alpha_1 = \{x \in \mathbb{Q} : \ x <_{\mathbb{Q}} 1\}$

Definición.

Si α es cortadura, entonces se define si

1) $\alpha \in \mathcal{P}$:

$\alpha^{-\mathcal{I}} = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq_{\mathbb{Q}} 0, \ \vee x >_{\mathbb{Q}} 0 \wedge \frac{1}{x} \notin \alpha, pero \ \frac{1}{x} \ no \ es \ elemento \ mínimo \ de \ \mathbb{Q} \backslash \alpha\}$.

2) $(-\alpha) \in \mathcal{P}$:

$\alpha^{-\mathcal{I}} = -(|\alpha|^{-\mathcal{I}})$.

Teorema 32.

Si α , β y γ son cortaduras, entonces

a. $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.
b. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.
c. $\alpha \cdot \mathcal{I} = \alpha$.
d. $\alpha^{-\mathcal{I}}$ es cortadura, si $\alpha \neq \mathcal{O}$ y $\alpha \cdot \alpha^{-\mathcal{I}} = \mathcal{I}$.
e. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Demostración.

a. $\alpha \cdot \beta = \begin{cases} \mathcal{O}, & si \ \ \alpha = \mathcal{O} \ \vee \beta = \mathcal{O} \\ |\alpha| \cdot |\beta|, & si \ \ \alpha, \beta \in \mathcal{P} \ \vee \ (-\alpha), (-\beta) \in \mathcal{P} \\ -(|\alpha| \cdot |\beta|), & si \ \ \alpha, (-\beta) \in \mathcal{P} \ \vee \ (-\alpha), \beta \in \mathcal{P} \end{cases}$

Pero por teorema 31.b. (conmutatividad del producto de cortaduras positivas)

$\beta \cdot \alpha =$

$\begin{cases} \mathcal{O}, & si \ \ \alpha = \mathcal{O} \ \vee \beta = \mathcal{O} \\ |\beta| \cdot |\alpha|, & si \ \ \beta, \alpha \in \mathcal{P} \ \vee \ (-\beta), (-\alpha) \in \mathcal{P} \\ -(|\beta| \cdot |\alpha|), & si \ \ \beta, (-\alpha) \in \mathcal{P} \ \vee \ (-\beta), \alpha \in \mathcal{P} \end{cases}$

Luego se verifica que $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

Las demostraciones de b., c., d. y e., se dejan como ejercicios.

Así se demuestra que $\mathbb{R} = \{\alpha \subset \mathbb{Q} : \ \alpha \ es \ cortadura \ \}$ con el orden definido y las operaciones aritméticas de adición y multiplicación es un cuerpo ordenado y además completo.

La unicidad de los denominados ahora con propiedad de los números reales culmina con la construcción de los números reales, "único cuerpo ordenado y completo", salvo isomorfismo.

Comentarios finales

La construcción de Cantor está pensada para que las sucesiones de Cauchy sean siempre convergentes, ya que todo número real debe ser el límite de alguna sucesión de Cauchy de números racionales, pero como muchas (mejor dicho infinitas) sucesiones son convergentes a un mismo α se debe definir la equivalencia de dos sucesiones.

Definición.

Sean $(x_n)_{n\in\omega} \subset \mathbb{Q}$, $(y_n)_{n\in\omega} \subset \mathbb{Q}$, dos sucesiones de Cauchy, entonces la relación "$\sim$", como $(x_n)_{n\in\omega} \sim (y_n)_{n\in\omega} \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$.

Observación.

Esta relación "$\sim$", se demuestra que es de equivalencia.

Si las clases de equivalencias de las sucesiones $(a_n)_{n\in\omega} \subset \mathbb{Q}$ y $(b_n)_{n\in\omega} \subset \mathbb{Q}$ se denotan por

$\alpha = \{(x_n)_{n\in\omega} \subset \mathbb{Q} \,:\, (x_n)_{n\in\omega} \sim (a_n)_{n\in\omega}\}$.

$\beta = \{(x_n)_{n\in\omega} \subset \mathbb{Q} \,:\, (x_n)_{n\in\omega} \sim (b_n)_{n\in\omega}\}$.

Se demuestra que $\alpha \cap \beta = \emptyset$, o bien $\alpha = \beta$.

Definición.

Se define el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, como

$$\mathbb{R} = \{\alpha : \ \alpha \ es\ clase\ de\ equivalencia\ \}$$

Observación.

Posteriormente se define una aritmética y un orden en $\mathbb{R}$, y se demuestra que $\mathbb{R}$, es un "cuerpo ordenado y completo".

Finalmente podríamos preguntarnos:

- ¿Con qué construcción nos quedamos, con la de Dedekind o la de Cantor?
- ¿Las cortaduras racionales? o ¿las sucesiones racionales de Cauchy?
- ¿Por qué no una sucesión convergente de aproximaciones racionales? , es decir,
- ¿Por qué no recurrir a los métodos numéricos?

Resulta más natural o real, donde el concepto esté por sobre la definición formal y rigurosa y la demostración de sus propiedades.

Por ejemplo, generar aproximaciones racionales al real $\sqrt{2}$:

Determinar un conjunto de aproximaciones racionales de ninguna, de una, de dos, de tres, cifras decimales que verifique que $x^2 <_{\mathbb{Q}} 2$. La cual es parte de la cortadura

$$\gamma = \{x \in \mathbb{Q} : \ x <_{\mathbb{Q}} 0 \ \vee \ x^2 <_{\mathbb{Q}} 2 \ \}$$

Es decir, con calculadora se puede obtener: $\{\,1\,;\ \ 1{,}4\,;\ \ 1{,}41\,;\ \ 1{,}414\,;\ldots\} \subset \gamma$.

Observaciones finales.

1. Hay una obvia inyección de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, a saber
   $f : \mathbb{Q} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$ definida como $f(s) = \alpha_s = \{x \in \mathbb{Q} : x <_{\mathbb{Q}} s\}, \forall s \in \mathbb{Q}$.

   Y un isomorfismo entre $(\mathbb{Q}, +_{\mathbb{Q}}, \cdot_{\mathbb{Q}}, \leq_{\mathbb{Q}})$ y $(f(\mathbb{Q}), +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}, \leq_{\mathbb{R}})$.

   De esta forma, puede considerarse que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

2. También hay una inyección de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$, a saber
   $f : \mathbb{Z} \xrightarrow{1-1} \mathbb{Q}$ definida como $f(p) = [(p, 1)], \forall p \in \mathbb{Z}$.

   Y un isomorfismo entre $(\mathbb{Z}, +_{\mathbb{Z}}, \cdot_{\mathbb{Z}}, \leq_{\mathbb{Z}})$ y $(f(\mathbb{Z}), +_{\mathbb{Q}}, \cdot_{\mathbb{Q}}, \leq_{\mathbb{Q}})$.

   Así mismo, puede considerarse que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

3. De la misma forma, hay una inyección de ω en $\mathbb{Z}$, a saber
   $f : \omega \xrightarrow{1-1} \mathbb{Z}$ definida como $f(m) = [(m, 0)], \forall m \in \omega$.

   Y un isomorfismo entre $(\omega, +_{\omega}, \cdot_{\omega}, \leq_{\omega})$ y $(f(\omega), +_{\mathbb{Z}}, \cdot_{\mathbb{Z}}, \leq_{\mathbb{Z}})$.

   Luego también puede considerarse que $\omega \subset \mathbb{Z}$.

   Así, podemos escribir $\omega \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Cuando se dota a los reales de una estructura algebraica y de orden, veremos que esta copia de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ respeta todas las propiedades esenciales de $\mathbb{Q}$.

Las cortaduras del tipo α_s con $s \in \mathbb{Q}$ se llaman cortaduras racionales. Las cortaduras que no son de ese tipo se llaman cortaduras irracionales o números irracionales.

Anexo A:

Sistema Axiomático de Zermelo-Fraenkel-Skolem (ZFS)

<u>Axioma de extensión.</u>
Dos conjuntos son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos.

$$E = X$$

<u>Axioma de la especificación.</u>
A todo conjunto y a toda condición corresponde un nuevo conjunto cuyos elementos son precisamente aquellos del conjunto para los cuales se cumple la condición.

$$E = \{p \in C : \ F(p)\}$$

<u>Axioma del apareamiento.</u>
Para dos conjuntos cualquiera, existe un conjunto al cual pertenecen ambos.

$$P = \{A, R\}$$

<u>Axioma de la unión.</u>
Para toda colección de conjuntos existe un conjunto que contiene a todos los elementos que pertenecen cuando menos a uno de los conjuntos de la colección.

$$U = \bigcup_{N \in O} N$$

<u>Axioma de la potencia.</u>
Para cada conjunto existe una colección de conjuntos que contiene entre sus elementos a todos los subconjuntos del conjunto dado.

$$P(O) = \{T : \ T \subset O\}$$

Definiciones y propiedades de:

- Relaciones. Funciones. (revisada en Algebra de Funciones)
- Equivalencia y orden. (estudiada en Fundamentos Estructurantes de la Matemática).

<u>Axioma del infinito (axioma de Peano).</u>

Existe un conjunto que contiene al 0 y al sucesor de cada uno de sus elementos.

$$\exists W, 0 \in W \wedge (x \in W \Longrightarrow x \cup \{x\} \in W)$$

<u>Axioma de elección.</u>
El producto cartesiano de una familia no vacía de conjuntos no vacíos es no vacío.

$$\forall \{A_j\}_{j \in J} \neq \emptyset, A_j \neq \emptyset, \forall j \in J \Longrightarrow \prod_{j \in J} A_j \neq \emptyset$$

<u>Axioma de sustitución o reemplazo.</u>
Si $S(a, b)$, es una condición o frase tal que para cada elemento a de un conjunto A el conjunto $\{\, b : \ S(a, b)\, \}$ puede ser formado, entonces existe una función F con dominio A tal que $F(a) = \{b: S(a, b)\}$ para cada a de A.

Anexo B:

Relaciones de equivalencia y Conjuntos Cuocientes. Notación.

Una relación R en A es de equivalencia, si es refleja, simétrica y transitiva.
Clase de equivalencia de $a \in A$, es el conjunto de todos los elementos de A que están relacionados con "a" bajo la relación R.

$$[a] = \{ x \in A : \ xRa \}$$

Conjunto cuociente:
Si R es una relación de equivalencia en A, entonces el conjunto cuociente de A con la relación R es el conjunto formado por todas las clases de equivalencias.

$$A/_R = \{ [a] : \ \forall a \in A \}$$

Observación VIP
Si $[a] = [b]$, entonces aRb.

Ejemplos de relaciones de equivalencia

En el conjunto de rectas en el espacio:

$$xRy \Leftrightarrow x \parallel y$$

En un conjunto A cualquiera:

$$xRy \Leftrightarrow x = y$$

En el conjunto potencia $P(A)$ de un conjunto A cualquiera finito:

$$xRy \Leftrightarrow k(x) = k(y) \qquad x, y \subset A$$

En el conjunto potencia $P(A)$ de un conjunto A cualquiera infinito:

$$xRy \Leftrightarrow x \xleftrightarrow{\exists f} y \qquad x, y \subset A$$

En particular, si $A = \mathbb{Q}$, tenemos varios subconjuntos de los racionales, tales como $\mathbb{P}, \omega, \mathbb{Z}$, donde $\mathbb{P}$ denota el conjunto de los pares ($\mathbb{P} \subset \omega \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$)

$$\omega R\mathbb{P} \Leftrightarrow \omega \xleftrightarrow{\exists f} \mathbb{P} \quad \equiv \quad \omega \approx \mathbb{P} \ \Leftrightarrow \ \omega \text{ es equipotente con } \mathbb{P}$$

$$\omega R\mathbb{Z} \Leftrightarrow \omega \xleftrightarrow{\exists f} \mathbb{Z} \quad \equiv \quad \omega \approx \mathbb{Z} \Leftrightarrow \ \omega \text{ es equipotente con } \mathbb{Z}$$

$$\omega R\mathbb{Q} \Leftrightarrow \omega \xleftrightarrow{\exists f} \mathbb{Q} \quad \equiv \quad \omega \approx \mathbb{Q} \ \Leftrightarrow \ \omega \text{ es equipotente con } \mathbb{Q}$$

También se verifica que:

$$\omega R\omega\times\omega \Leftrightarrow \omega \xleftrightarrow{\exists f} \omega\times\omega \quad \equiv \quad \omega \approx \omega\times\omega \ \Leftrightarrow \ \omega \text{ es equipotente con } \omega\times\omega$$

Notas:

- $x \mid y \Leftrightarrow x$ divide a $y \ \Leftrightarrow \ \exists n \in \mathbb{N}, \ y = nx$
- p es divisible por $m \ \Leftrightarrow \ \exists k \in \mathbb{Z}, \ p = km \ \Leftrightarrow \ p \in m\mathbb{Z}$
- $m\mathbb{Z} = \{0, \pm m, \pm 2m, \pm 3m, \dots\}$ enteros múltiplos de m
- $\begin{cases} xRy \Leftrightarrow x - y \ \ es\ divisible\ por\ \ m \\ \qquad \Leftrightarrow congruencia\ de\ x\ con\ y, módulo\ m \\ \qquad \Leftrightarrow x \equiv y \ \ (mod\ m) \end{cases}$

En general, usamos el símbolo " ~ " a cambio de la " R ".

Resumen final

La Axiomática de la Teoría de Conjuntos trata los siguientes temas:

Axiomas de la extensión, especificación, apareamiento, unión y potencia. (estudiada en asignaturas de Álgebra)

- Primera parte (Unidad 1 de Tópicos de Matemática Contemporánea, desde 2016):
  - Axioma del infinito y axiomas de Peano.
  - Construcción de los naturales ω.
  - Principio de Inducción Matemática y recursividad.
  - Aritmética y orden en los naturales ω.
  - Relaciones de Equivalencia. Clases de equivalencia.
  - Construcción de los enteros $\mathbb{Z}$ y los racionales $\mathbb{Q}$ como conjuntos cuocientes.
  - Aritmética y orden en los enteros $\mathbb{Z}$ y los racionales $\mathbb{Q}$.
  - Cortaduras de Dedekind o Sucesiones de Cauchy de Cantor.
  - Aritmética, orden y completitud en los reales $\mathbb{R}$.
- Segunda parte (Unidad 2 de Tópicos de Matemática Contemporánea, desde 2016):
  - Equipotencia, Orden subordinado a la equipotencia entre conjuntos.
  - Teoremas de Cantor.
  - Cardinalidad de conjuntos finitos e Infinitos.
  - Cardinalidad de los conjuntos numéricos: $\omega, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e intervalos.
  - Alef y la hipótesis del continuo.

Bibliografía recomendada

- **Ayres, F.** (1969), *Algebra Moderna*. Impreso en Colombia. México. Editorial McGraw Hill.
- **Babini, J.** (1974), *Historia de las ideas modernas en matemática*. Washington, DC. Estados Unidos. Monografía OEA.
- **De Lorenzo, J.** (1972), *Iniciación a la Teoría Intuitiva de Conjuntos*. Madrid, España. Editorial TECNOS.
- **Halmos, P.** (1973), *Teoría Intuitiva de los Conjuntos*, México. Editorial CECSA 8º impresión en español.
- **Lewin, R.** (2011), *La Teoría de Conjuntos y los Fundamentos de la Matemática, Monografía "Herramientas para la Formación de Profesores de Matemática",* Santiago, Chile. Editorial J.C. Sáez.
- **Lipschutz, S.** (1970), *Teoría de Conjuntos*. Impreso en Colombia. México. Editorial McGraw Hill.
- **Lipschutz, S.** (1970), *Topología general*. Impreso en Colombia. México. Editorial McGraw Hill.
- **Spivak, M.** (2012). *Calculus*, Volumen 2, tercera edición. Barcelona, España. Editorial Reverté.
- **Trejo, C.** (1978), *El Concepto de Número*. Washington, DC. Estados Unidos. Monografía OEA.